Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

Aufgabe MG1:

Knut hat Schokoladenpralinen und Marzipanpralinen gemacht. Von beiden Sorten gibt es sowohl kleine als auch große Pralinen. Dabei gilt:

- $\frac{1}{5}$ der Schokoladenpralinen sind groß.
- $\frac{1}{4}$ der großen Pralinen sind Schokoladenpralinen.
- $\frac{1}{3}$ der Marzipanpralinen sind groß.

(a) Welcher Anteil der kleinen Pralinen sind Schokoladenpralinen?

(b) Die Anzahl aller Pralinen ist durch 24 teilbar. Wieviele Pralinen hat Kurt mindestens gemacht?

(c) Wir gehen nun von der Mindestzahl von Pralinen aus Aufgabenteil (b) aus.

Wieviele Pralinen (und von welcher Art) muss Kurt nun mindestens noch zusätzlich machen, wenn er danach insgesamt

- genausoviele Schokoladenpralinen wie Marzipanpralinen
- und genausoviele große wie kleine Pralinen

haben möchte?

Lösung MG1:

(a) Sei x die Anzahl der großen Schokoladenpralinen.

Da $\frac{1}{5}$ der Schokoladenpralinen groß sind, gibt es insgesamt $5x$ Schokoladenpralinen und $5x - x = 4x$ kleine Schokoladenpralinen.

Da $\frac{1}{4}$ der großen Pralinen Schokoladenpralinen sind, gibt es insgesamt $4x$ große Pralinen und $4x - x = 3x$ große Marzipanpralinen.

Da $\frac{1}{3}$ der Marzipanpralinen groß sind, gibt es insgesamt $3 \cdot 3x = 9x$ Marzipanpralinen und $9x - 3x = 6x$ kleine Marzipanpralinen.

<u>Übersicht:</u>

	Schoko	Marzipan	gesamt
groß	x	$3x$	$4x$
klein	$4x$	$6x$	$10x$
gesamt	$5x$	$9x$	$14x$

Der Anteil der Schokoladenpralinen unter den kleinen Pralinen beträgt somit:

$$\frac{4x}{10x} = \frac{2}{5} = 40\%$$

(b) Die Gesamtzahl der Pralinen beträgt $14x$ (siehe oben), ist also ein Vielfaches von 14. Wenn diese Zahl auch ein Vielfaches von 24 ist, muss sie mindestens $\text{kgV}(14, 24) = 168$ betragen.

In diesem Fall ist $x = \frac{168}{14} = 12$ und wir haben folgende Situation:

	Schoko	Marzipan	gesamt
groß	12	36	48
klein	48	72	120
gesamt	60	108	168

(c) Um genausoviele große wie kleine Pralinen zu haben, muss Kurt mindestens $120 - 48 = 72$ große Pralinen zusätzlich machen.

Macht er davon 60 große Schokoladenpralinen und 12 große Marzipanpralinen, so hat er auch genausoviele Schoko- wie Marzipanpralinen.

Dann ergibt sich:

	Schoko	Marzipan	gesamt
groß	$12 + 60 = 72$	$36 + 12 = 48$	120
klein	48	72	120
gesamt	120	120	$168 + 72 = 240$

Aufgabe MG2:

Vier (verschiedene) Punkte A, B, C, D liegen auf einer Geraden, wobei $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}|$ gilt.

Es werden nun die Punkte E und F auf derselben Seite der Geraden so gewählt, dass $\triangle ABE$ und $\triangle CDF$ gleichseitig sind. Weiter sei S der Schnittpunkt der Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$.

(a) Berechne den Schnittwinkel der Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$.

(b) Bestimme das Verhältnis $|\overline{ES}| : |\overline{CS}|$ der Längen der Strecken $\overline{ES}$ und $\overline{CS}$.

(c) Der Flächeninhalt der Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle CDF$ sei 1.

Bestimme den Flächeninhalt der Dreiecke:

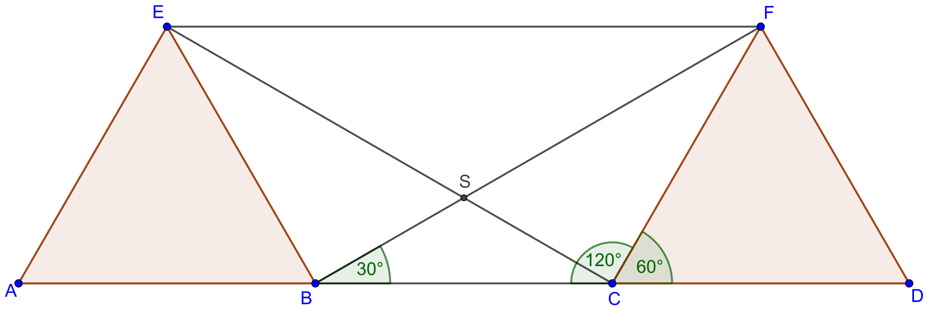
$$\triangle BSC \quad , \quad \triangle BSE \quad , \quad \triangle CSF \quad , \quad \triangle ESF$$

Lösung MG2:

(a) Da $\triangle CDF$ gleichseitig ist, gilt $\angle DCF = 60°$. Es folgt (Nebenwinkel): $\angle FCB = 180° - 60° = 120°$

Wegen $|\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{CF}|$ ist $\triangle BCF$ gleichschenklig und es folgt:

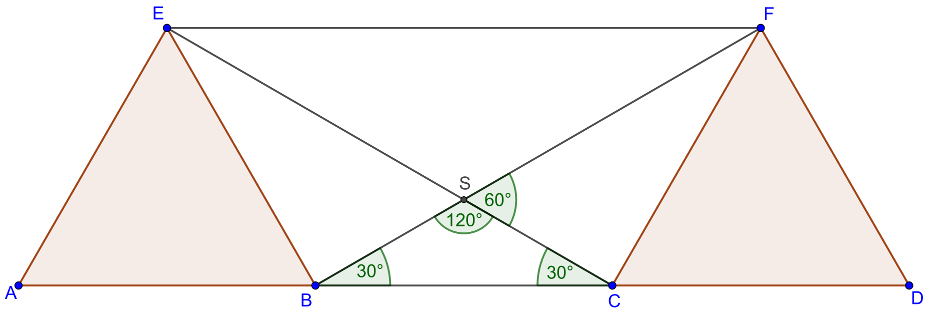
$$\angle CBS = \angle CBF = \frac{180° - \angle FCB}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$$



Analog folgt auch $\angle SCB = 30°$ und somit ergibt sich aus der Winkelsumme im Dreieck $\triangle BSC$:

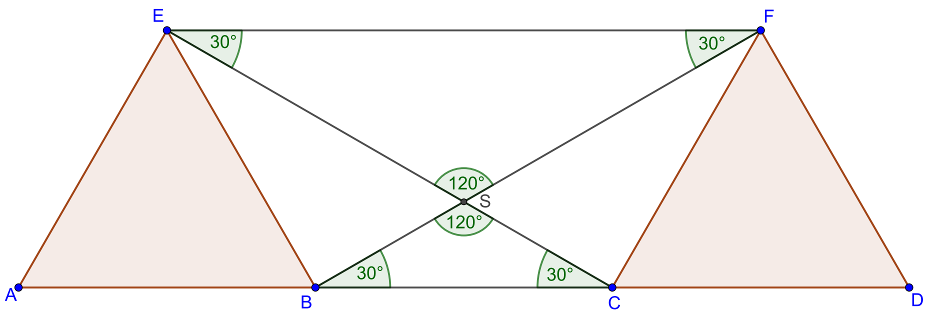
$$\angle BSC = 180° - \angle CBS - \angle SCB = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$$

Schließlich folgt nun (Nebenwinkel), dass: $\quad angleCSF = 180° - 120° = 60°$



Die beiden Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ schneiden sich also unter einem Schnittwinkel von 60°.

(b) Es gilt auch $\angle FSE = 120°$ (Scheitelwinkel zu $\angle BSC$) sowie (da $\triangle FSE$ gleichschenklig ist, da aus Symmetriegründen $|\overline{FS}| = |\overline{ES}|$ gilt) $\angle SEF = \angle EFS = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.



Folglich sind die Dreiecke $\triangle BSC$ und $\triangle ESF$ ähnlich zueinander, da sie drei Paare gleich großer Winkel haben.

Aus der Ähnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt: $\quad |\overline{ES}| : |\overline{CS}| = |\overline{EF}| : |\overline{BC}| \ (*)$

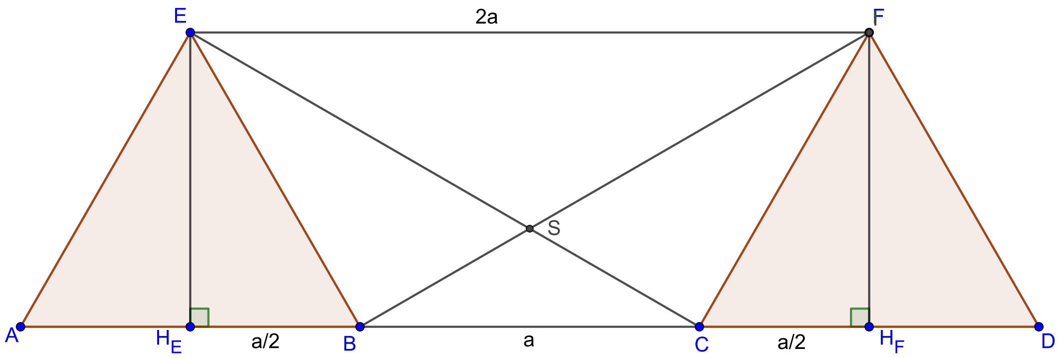
Bezeichnen wir die Seitenlänge der (gleichseitigen) Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle CDF$ mit a. Dann gilt auch (Voraussetzung) $|\overline{BC}| = a$.

Seien H_E und H_F die Lotfußpunkte von E bzw. F auf die Gerade durch A, B, C, D. Da die Fußpunkte der Höhen im gleichseitigen Dreieck zugleich die Seitenmittelpunkte sind, gilt $|\overline{H_E B}| = |\overline{CH_F}| = \frac{a}{2}$ und folglich:

$$|\overline{H_E H_F}| = |\overline{H_E B}| + |\overline{BC}| + |\overline{CH_F}| = \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a$$

und da $\square H_E H_F F E$ ein Rechteck ist (rechte Winkel bei H_E und H_F sowie aus Symmetriegründen gleich große Winkel bei E und F) gilt auch:

$$|\overline{EF}| = |\overline{H_E H_F}| = 2a$$



Wir setzen nun $|\overline{BC}| = a$ und $|\overline{EF}| = 2a$ in $(*)$ ein und erhalten:

$$|\overline{ES}| : |\overline{CS}| = |\overline{EF}| : |\overline{BC}| = \frac{2a}{a} = 2$$

(c) Da $\triangle BCF$ und $\triangle CDF$ eine gemeinsame Höhe $\overline{FH_F}$ haben und die entsprechenden Grundeiten wegen $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$ gleich lang sind, folgt: $\quad F(\triangle BCF) = F(\triangle CDF) \overset{\text{Voraussetzung}}{=} 1$

Da man $\triangle BCF$ in $\triangle CSF$ und $\triangle BSC$ zerlegen kann, folgt weiter:

$$F(\triangle CSF) + F(\triangle BSC) = 1 \quad (1)$$

Da $\triangle CSF$ und $\triangle BSC$ eine gemeinsame Höhe (von C auf BF) haben und für die entsprechenden Grundeiten $|\overline{FS}| = 2\,|\overline{BS}|$ (siehe (b)) gilt, folgt:

$$F(\triangle CSF) = 2F(\triangle BSC) \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so ergibt sich:

$$2F(\triangle BSC) + F(\triangle BSC) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3F(\triangle BSC) = 1 \quad \overset{:3}{\Rightarrow} \quad F(\triangle BSC) = \frac{1}{3}$$

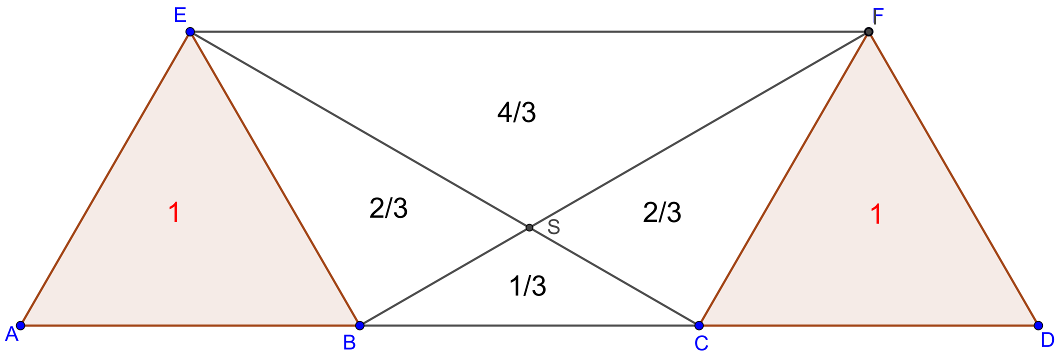
In (2) eingesetzt, erhält man nun: $\quad F(\triangle CSF) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Völlig analog (bzw. aus Symmetriegründen) ist auch: $\quad F(\triangle BSE) = \frac{2}{3}$

Da $\triangle BSC$ und $\triangle ESF$ ähnlich zueinander sind, wobei die Seiten in $\triangle ESF$ alle doppelt so lang wie die entsprechenden Seiten in $\triangle BSC$ sind, folgt schließlich:

$$F(\triangle ESF) = 2^2 \cdot F(\triangle BSC) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Ergebnis:



Aufgabe MG3:
Ein Stausee hat einen Zufluss, durch den immer konstant Wasser hinzukommt. Zudem gibt es zwei Tore A und B, die man öffnen kann, um Wasser abzulassen.

Um den Wasserpegel von $5,00$ Meter auf $4,90$ Meter abzusenken, dauert es:

- 30 Minuten, wenn nur Tor A geöffnet ist
- 50 Minuten, wenn nur Tor B geöffnet ist
- 15 Minuten, wenn beide Tore geöffnet sind

Wir nehmen bei der gesamten Aufgabe an, dass die Abflussgeschwindigkeiten durch die beiden Tore jeweils konstant sind.

(a) Wie lange dauert es, bis der Wasserpegel wieder von $4,90$ Meter auf $5,00$ Meter steigt, wenn beide Tore geschlossen sind.

(b) Durch anhaltenden Regen ensteht eine neue Situation: Der Zufluss ist nun 3-mal so stark wie normal. Wie lange dauert es jetzt, den Wasserpegel von $5,00$ Meter auf $4,90$ Meter abzusenken, wenn beide Tore geöffnet sind.

(c) Verallgemeinere (b) wie folgt: Der Zufluss sei k-mal so stark wie normal (mit $k \in \mathbb{R}_0^+$).

Für welche Werte von k ist es überhaupt noch möglich, durch das Öffnen beider Tore den Wasserpegel abzusenken?

(d) In einer Extremwetterlage ist der Faktor k so hoch, dass der Pegelstand trotz geöffneter Tore in 25 Minuten von $4,90$ auf $5,00$ Meter steigt. Bestimme k.

Lösung MG3:

Sei W die Wassermenge, die abgelassen werden (bzw. zufließen) muss, um den Pegel von $5,00$ Meter auf $4,90$ Meter abzusenken (bzw. von $4,90$ Meter auf $5,00$ Meter zu erhöhen).

Weiter seien:

V_A	Volumenstrom des Abflusses durch Tor A	
V_B	Volumenstrom des Abflusses durch Tor B	
V_Z	Volumenstrom des Zuflusses	(jeweils in Liter/Minute)

Nach den Angaben gilt:

$$\begin{array}{rclcrcll} W &=& (V_A - V_Z)\cdot 30\text{min} & \Leftrightarrow & V_A - V_Z &=& \frac{W}{30\text{min}} & (1)\\ W &=& (V_B - V_Z)\cdot 50\text{min} & \Leftrightarrow & V_B - V_Z &=& \frac{W}{50\text{min}} & (2)\\ W &=& (V_A + V_B - V_Z)\cdot 15\text{min} & \Leftrightarrow & V_A + V_B - V_Z &=& \frac{W}{15\text{min}} & (3)\end{array}$$

(a) Mit (3)-(1)-(2) folgt:

$$V_Z = V_A+V_B-V_Z-(V_A-V_Z)-(V_B-V_Z) = \frac{W}{15\text{min}}-\frac{W}{30\text{min}}-\frac{W}{50\text{min}} = \frac{W}{150\text{min}}\cdot\underbrace{(10-5-3)}_{=2} = \frac{W}{75\text{min}}$$

Für die Zeit t, die es dauert, bis der Wasserpegel von $4,90$ Meter auf $5,00$ Meter steigt, wenn beide Tore geschlossen sind, gilt nun:

$$T = \frac{W}{V_Z} = \frac{W}{\left(\frac{W}{75\text{min}}\right)} = 75\text{min}$$

(b) Aus (1) erhält man:

$$V_A = V_Z + \frac{W}{30\text{min}} \overset{(a)}{=} \frac{W}{75\text{min}} + \frac{W}{30\text{min}} = \frac{W}{150\text{min}}\cdot\underbrace{(2+5)}_{=7} = \frac{7}{150}\frac{W}{\text{min}}$$

Aus (2) erhält man:

$$V_B = V_Z + \frac{W}{50\text{min}} \overset{(a)}{=} \frac{W}{75\text{min}} + \frac{W}{50\text{min}} = \frac{W}{150\text{min}}\cdot\underbrace{(2+3)}_{=5} = \frac{5}{150}\frac{W}{\text{min}}$$

Nun folgt:

$$V_A + V_B - 3\cdot V_Z = \frac{7}{150}\frac{W}{\text{min}} + \frac{5}{150}\frac{W}{\text{min}} - 3\cdot\frac{2}{150}\frac{W}{\text{min}} = \frac{6}{150}\frac{W}{\text{min}} = \frac{W}{25\text{min}}$$

Bei 3-mal so starkem Zuflus wie normal dauert es also:

$$\frac{W}{V_A + V_B - 3\cdot V_Z} = \frac{W}{\left(\frac{W}{25\text{min}}\right)} = 25\text{min}$$

bis der Pegelstand entsprechend abgesenkt ist.

(c) Analog zu (b) ist:

$$V_A + V_B - k\cdot V_Z = \frac{7}{150}\frac{W}{\text{min}} + \frac{5}{150}\frac{W}{\text{min}} - k\cdot\frac{2}{150}\frac{W}{\text{min}} = \frac{12-2k}{150}\frac{W}{\text{min}} = \frac{6-k}{75}\frac{W}{\text{min}}$$

Damit ist es nur im Fall $\frac{6-k}{75} > 0 \Leftrightarrow k < 6$ möglich, den Pegel zu senken.

(d) Nun gilt:

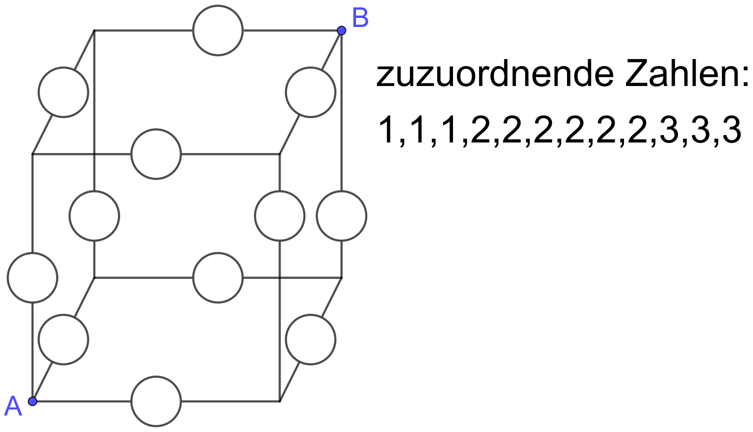
$$k \cdot V_Z - V_A - V_B = \frac{W}{25\text{min}} \;\Leftrightarrow\; k \cdot \frac{2}{150}\frac{W}{\text{min}} - \frac{7}{150}\frac{W}{\text{min}} + \frac{5}{150}\frac{W}{\text{min}}\frac{W}{25\text{min}} \overset{\cdot \frac{75\text{min}}{W}}{\Leftrightarrow} k - 6 = 3 \;\Leftrightarrow\; k = 9$$

Anmerkung: Die Ergebnisse in (b),(c) und (d) hängen zusammen. Während im Fall $k = 6$ ein Gleichgewicht herrscht (Zufluss und Abfluss sind gleich stark) sinkt der Wasserpegel im Fall $k = 3 = 6 - 3$ genauso schnell, wie er im Fall $k = 9 = 6 + 3$ steigt.

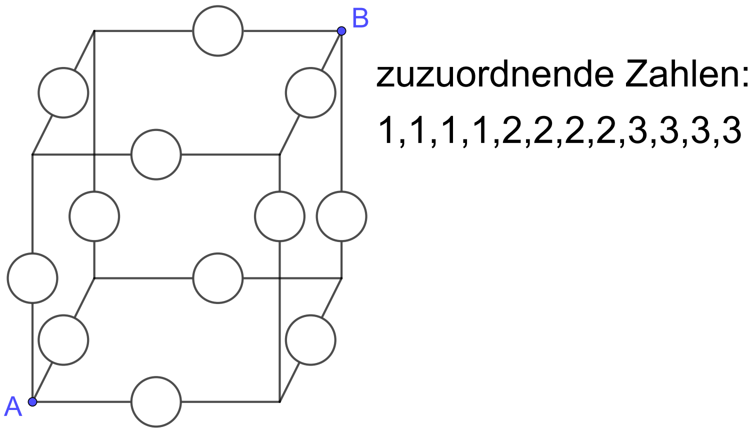
Aufgabe MG4:
Bei einem Würfel gibt es 6 Wege vom Punkt A zum Punkt B, die jeweils über 3 Kanten des Würfels verlaufen. Ordnen Sie jeweils die angegebenen Zahlen so den 12 Kanten (jeweils eine Zahl pro Kante) zu, dass die Summe der den 3 Kanten eines Wegs zugeordneten Zahlen für jeden der 6 Wege dieselbe ist.

Anmerkung: Bei jedem Aufgabenteil kann der Wert der Summe ein anderer sein. Es gibt für jeden Aufgabenteil mehrere Lösungen. (Eine Lösung genügt jeweils.)

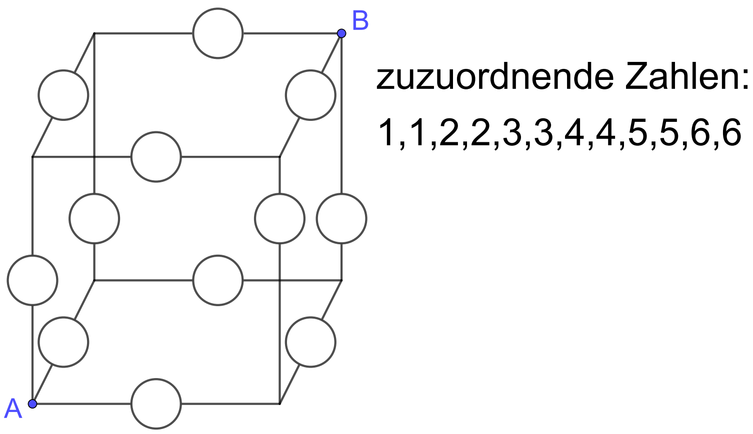
(a)



(b)

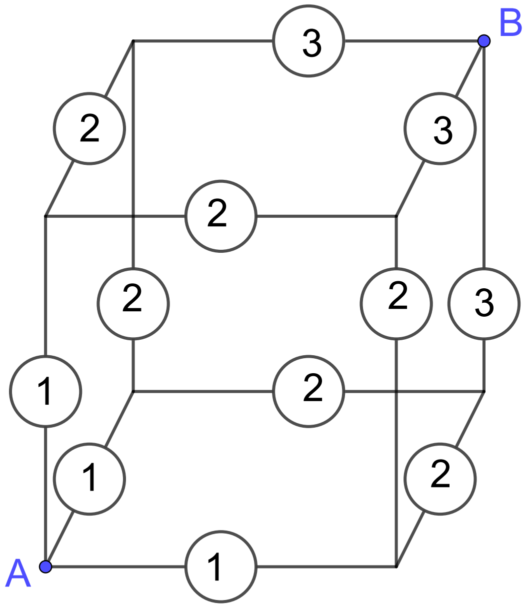


(c)



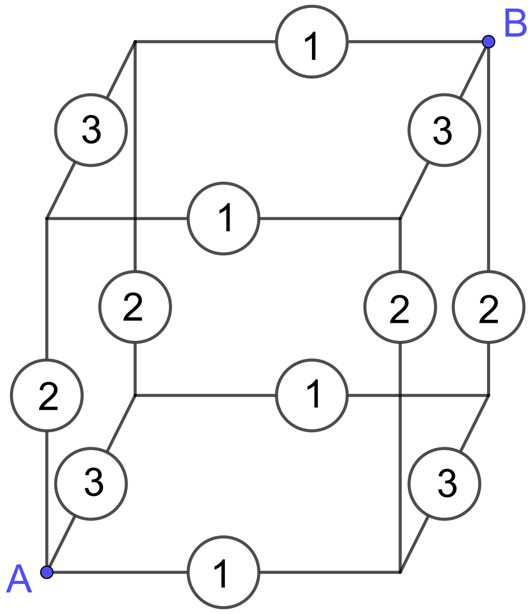
Lösung MG4:

(a)



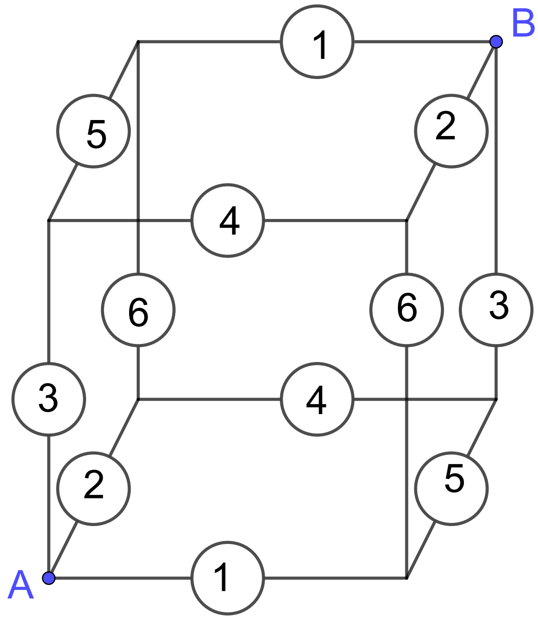
Idee der Lösung: Die drei Kanten, die an A grenzen (und somit von jedem Weg zuerst durchlaufen werden) erhalten eine 1. Die sechs Kanten, die weder an A noch an C grenzen (und somit von jedem Weg als zweites durchlaufen werden), erhalten eine 2. Die drei Kanten, die an C grenzen (und somit von jedem Weg zuletzt durchlaufen werden) erhalten eine 3.

(b)



Idee der Lösung: Parallele Kanten erhalten diesselben Zahlen. In diesem Fall erhalten die vier nach rechts führenden Kanten eine 1, die vier nach oben führenden Kanten eine 2 und die vier nach hinten führenden Kanten eine 3.

(c)



Idee der Lösung: Die drei Kanten, die an A grenzen (und somit von jedem Weg zuerst durchlaufen werden) erhalten die Zahlen $1, 2, 3$. Die drei Kanten, die an C grenzen (und somit von jedem Weg zuletzt durchlaufen werden) erhalten ebenfalls die Zahlen $1, 2, 3$, wobei diese so angeordnet werden, dass kein Weg zweimal diesselbe Zahl durchläuft. Schließlich werden die verbleibenden Zahlen so auf die sechs Kanten, die weder an A noch an C grenzen (und somit von jedem Weg als zweites durchlaufen werden) verteilt, dass die Summe der Zahlen über jeden Weg gleich ist. (Die beiden Wege mit 1 und 2 an Anfang und Ende bekommen in der Mitte eine 6. Die beiden Wege mit 1 und 3 an Anfang und Ende bekommen in der Mitte eine 5. Die beiden Wege mit 2 und 3 an Anfang und Ende bekommen in der Mitte eine 4.)

Aufgabe MS1:

Die Strecke, die der Hund in 12 Sekunden läuft, schafft die Katze in 16 Sekunden.

Die Strecke, die der Katze in 12 Sekunden läuft, schafft die Maus in 20 Sekunden.

Wie lange braucht der Hund für die Strecke, die die Maus in 12 Sekunden läuft ?

Lösung:

1. Möglichkeit:

Seien v_H, v_K, v_M die Geschwindigkeiten von Hund, Katze und Maus. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 12\text{s} \cdot v_H = 16\text{s} \cdot v_K \quad &\Leftrightarrow \quad V_K = \tfrac{12\text{s}}{16\text{s}} \cdot V_H \quad \Leftrightarrow \quad V_K = \tfrac{3}{4} \cdot V_H \quad (1) \\ 12\text{s} \cdot v_K = 20\text{s} \cdot v_M \quad &\Leftrightarrow \quad V_M = \tfrac{12\text{s}}{20\text{s}} \cdot V_K \quad \Leftrightarrow \quad V_M = \tfrac{3}{5} \cdot V_K \quad (2) \end{aligned}$$

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt:

$$V_M = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot V_H = \frac{9}{20} \cdot v_H$$

Für die gesuchte Zeit x folgt nun:

$$x \cdot v_H = 12\text{s} \cdot v_M \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{v_M}{v_H} \cdot 12\text{s} = \frac{9}{20} \cdot 12\text{s} = 5.4\text{s}$$

Der Hund braucht also genau 5.4 Sekunden für die Strecke, die die Maus in 12 Sekunden läuft ?

2. Möglichkeit:

Für die Zeit t_K, die die Katze für die Strecke braucht, die die Maus in 12 Sekunden läuft , gilt:

$$\frac{t_K}{12\text{s}} = \frac{12\text{s}}{20\text{s}} \quad \Leftrightarrow \quad t_K = \frac{12\text{s}}{20\text{s}} \cdot 12\text{s} = \frac{3}{5} \cdot 12\text{s} = 7.2\text{s}$$

Nun folgt für die Zeit t_H, die der Hund für diese Strecke braucht:

$$\frac{t_H}{7.2\text{s}} = \frac{12\text{s}}{16\text{s}} \quad \Leftrightarrow \quad t_K = \frac{12\text{s}}{16\text{s}} \cdot 7.2\text{s} = \frac{3}{4} \cdot 7.2\text{s} = 5.4\text{s}$$

Der Hund braucht also genau 5.4 Sekunden für die Strecke, die die Maus in 12 Sekunden läuft ?

Aufgabe MS2:

Tina bekam in den Monaten Januar-Oktober ein festes monatliches Taschengeld, von dem sie in jedem Monat genau 40% gespart hat.

Ab November wird Tinas Taschengeld erhöht.

Sie überlegt nun: Wenn ich in den Monaten November und Dezember 90% meines Taschengelds spare, habe ich am Ende des Jahres die Hälfte meines gesamten Taschengelds dieses Jahres gespart.

Um wieviel Prozent wurde Tinas Taschengeld ab November erhöht?

Lösung:

Sei T_1 die Höhe des Taschengelds bis Oktober und T_2 die Höhe des Taschengelds ab November.

Dann hat Tina im Lauf des gesamten Jahres:

- den Betrag $10 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2$ erhalten
- den Betrag $10 \cdot 0.4 \cdot T_1 + 2 \cdot 0.9 \cdot T_2 = 4 \cdot T_1 + 1.8 \cdot T_2$ gespart

Also gilt:

$$\underbrace{\frac{4 \cdot T_1 + 1.8 \cdot T_2}{10 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2}}_{\text{Spar-Anteil im ganzen Jahr}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot T_1 + 1.8 \cdot T_2 = 5 \cdot T_1 + T_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0.8 \cdot T_2 = T_1 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{1}{0.8} \cdot T_1$$

Wegen $\frac{1}{0.8} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5}{4} = 1.25$ wurde Tinas Taschengeld um 25% erhöht.

Aufgabe MS3:

Hier siehst du eine Tabelle des kleines Einmaleins:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	17	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Was ist die Summe aller Zahlen in dieser Tabelle?

Lösung:

Es ist:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) = 5\cdot 11 = 55$$

Die Summe der Zahlen in der 1. Zeile ist also 55.

Folglich ist:

die Summe der Zahlen in der 2. Zeile: $2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 2\cdot 55$

die Summe der Zahlen in der 3. Zeile: $3\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 3\cdot 55$

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

die Summe der Zahlen in der 10. Zeile: $2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 10\cdot 55$

Die Summe aller vorkommenden Zahlen ist daher:

$$1\cdot 55+2\cdot 55+3\cdot 55+4\cdot 55+5\cdot 55+6\cdot 55+7\cdot 55+8\cdot 55+9\cdot 55+10\cdot 55 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 55 = 55^2$$

Das berechnet man am schnellsten mit der binomischen Formel:

$$55^2 = (50+5)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 5 + 5^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$$

Ergebnis: Die Summe aller Zahlen in der Tabelle ist 3025.

Aufgabe MS4:
Bestimme die vierstellige Zahl $n = abba$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (mit $a \neq 0$), die durch 36 aber nicht durch 72 teilbar ist.

Lösung:

Eine Zahl n ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist (da $36 = 4 \cdot 9$ und da 4 und 9 teilerfremd sind).

Dabei ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme von n durch 9 teilbar ist. Die Quersumme von n beträgt hier:

$$Q(n) = a + b + b + a = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Da 2 und 9 teilerfremd sind, ist $Q(n) = 2(a + b)$ genau dann durch 9 teilbar, wenn $a + b$ durch 9 teilbar ist. Da $a + b \geq 1 + 0 = 1$ und $a + b \leq 9 + 9 = 18$ kommen nur die Fälle $a + b = 9$ oder $a + b = 18$ in Frage.

Es bestehen also die Möglichkeiten:

$$n \in \{ \underbrace{1881 \ , \ 2772 \ , \ 3663 \ , \ 4554 \ , \ 5445 \ , \ 6336 \ , \ 7227 \ , \ 8118 \ , \ 9009}_{a+b=9} \ , \ \underbrace{9999}_{a+b=18} \ \}$$

Weiterhin ist n genau dann durch 4 teilbar, wenn die Zahl, die aus den letzen beiden Ziffern von n gebildet wird, durch 4 teilbar ist. Da $81, 63, 54, 45, 27, 18, 9, 99$ alle nicht durch 4 teilbar sind, bleiben nur die Möglichkeiten:

$$n \in \{ \ 2772 \ , \ 6336 \ \}$$

Da die Zahl 6336 sogar durch 8 teilbar ist (da die Zahl 336, die aus den letzten drei Ziffern gebildet wird, durch 8 teilbar ist), ist sie auch durch 72 teilbar (da sie auch durch 9 teilbar ist und da 8 und 9 teilerfremd sind mit $8 \cdot 9 = 72$).

Hingegen ist 2772 nicht durch 8 teilbar, (da die Zahl 772, die aus den letzten drei Ziffern gebildet wird, nicht durch 8 teilbar ist) und somit (wegen $8 \mid 72$) auch nicht durch 72 teilbar.

Die gesuchte Zahl ist also $n = 2772$.

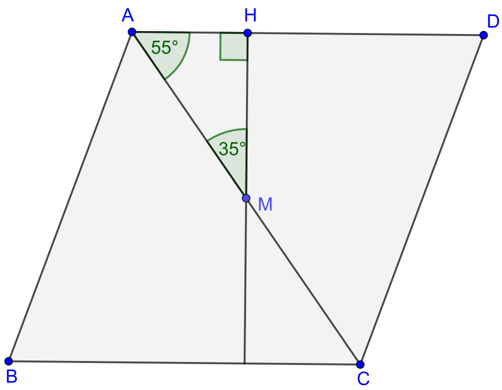
Aufgabe MS5:
In einer Raute (Viereck mit 4 gleich langen Seiten) schneidet eine Höhe (=Senkrechte zu zwei gegenüberliegenden Seiten) eine Diagonale in einem Winkel von 35°.

(a) Bestimme die Innenwinkel der Raute.

(b) Bestimme den Schnittwinkel der beiden Höhen der Raute.

Lösung:

(a) In der folgenden Skizze sind die Höhe und die Diagonale der Raute eingezeichnet, die sich im Winkel von 35° schneiden.



Durch Betrachtung der Winkelsumme im Dreieck $\triangle AMH$ folgt:

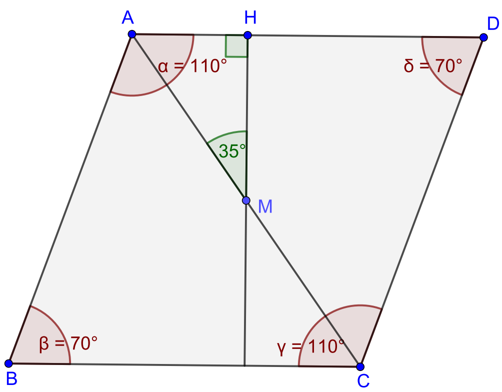
$$\angle HAM = 180^\circ - \angle AMH - \angle MHA = 180^\circ - 35^\circ - 90^\circ = 55^\circ$$

Da die Diagonalen in einer Raute die Innenwinkel halbieren, gilt: $\alpha = \angle DAB = 2 \cdot 55^\circ = 110^\circ$

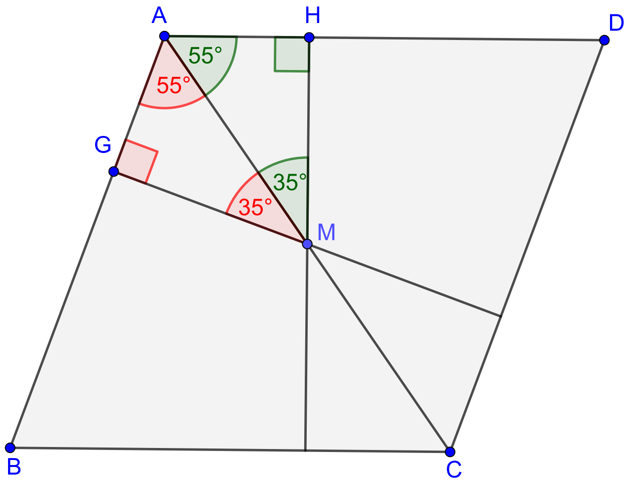
Da in einer Raute gegenüberliegende Winkel gleich groß sind, gilt auch: $\gamma = \angle BCD = \alpha = 110^\circ$

Zudem sind auch $\beta = \angle ABC$ und $\delta = CDA$ gleich groß und da die Winkelsumme im Viereck stets 360° beträgt, folgt:

$$(\beta = \delta \quad \text{und} \quad \beta + \delta = 360^\circ - 2 \cdot 110^\circ = 140^\circ) \quad \Rightarrow \quad \beta = \delta = 70^\circ$$



(b) Wir zeichnen auch die zweite Höhe der Raute ein.



Es ist $\angle GAM = \angle HAM = 55°$ (da die Diagonale den Innenweinkel halbiert).

Somit ist (Winkelsumme im Dreieck $\triangle AMG$:

$$\angle AMG = 180° - \angle MGA - \angle GAM = 180° - 90° - 55° = 35°$$

Somit schneiden sich die beiden Höhen mit dem Schnittwinkel:

$$\angle HMG = \angle HMA + \angle AMG = 35° + 35° = 70°$$

Aufgabe MS6:

(a) Knut macht ein Puzzle mit $10 \times 20 = 200$ Teilen (d.h. es gibt 10 Reihen mit je 20 Teilen).

Er baut die Teile nacheinander in das Puzzle ein und schreibt für jedes der 200 Teile auf, mit wievielen anderen (bereits eingebauten) Teilen er es verbindet.

Das erste Teil wird mitgezählt, dieses wird mit 0 bereits eingebauten Teilen verbunden. Die weiteren Teile werden mit 1 bis 4 bereits eingebauten Teilen verbunden.

Was ist der Durchschnitt aus den 200 Zahlen, die Knut hierbei erhält ?

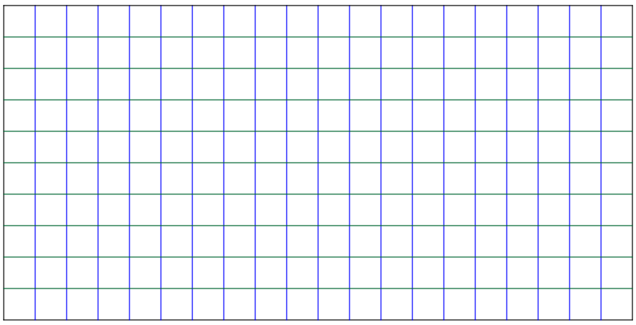
(Gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch oder als Kommazahl an.)

(b) Verallgemeinere Teil (a) auf ein $m \times n$-Puzzle (mit $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig).

Mit wievielen bereits eingebauten Teilen wird ein neues Teil im Durchschnitt (in Abhängigkeit von m und n) verbunden?

Lösung:

(a) Die Anzahl der "Verbindungsstellen" im gesamten Puzzle beträgt:



$$\underbrace{19 \cdot 10}_{\text{im Bild blau}} + \underbrace{9 \cdot 20}_{\text{im Bild grün}} = 190 + 180 = 370$$

Demzufolge wird jedes Teil im Durchschnitt mit

$$\frac{370}{200} = \frac{37}{20} = 1,85$$

bereits eingebauten Teilen verbunden.

(b) Die Anzahl der "Verbindungsstellen" im gesamten Puzzle beträgt nun:

$$(n-1) \cdot m + (m-1) \cdot n = 2mn - m - n$$

Demzufolge wird jedes Teil im Durchschnitt mit

$$\frac{2nm - m - n}{m \cdot n} = 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

bereits eingebauten Teilen verbunden.

Aufgabe MS7:

Zwei Höhen in einem Dreieck haben die Längen 3 und 7.

Welche Werte sind als Länge der dritten Höhe möglich?
Gib einen Bereich (Untergrenze, Obergrenze) für die möglichen Längen der dritten Höhe an.

Lösung:

Sei F der Flächeninhalt des Dreiecks und seien a, b, c die Seitenlängen mit den entsprechenden Höhen h_a, h_b, h_c.

Dann gilt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2F}{h_a} \text{ und } b = \frac{2F}{h_b} \text{ und } c = \frac{2F}{h_c}$$

Es gibt genau dann ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, wenn:

$$a - b < c < a + b \quad \overset{\text{siehe oben}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2F}{h_a} - \frac{2F}{h_b} < \frac{2F}{h_c} < \frac{2F}{h_a} + \frac{2F}{h_b} \quad \overset{:2F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$$

Mit $h_a = 3$ und $h_b = 7$ folgt ist dies äquivalent zu:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{21} < \frac{1}{h_c} < \frac{10}{21} \quad \overset{\text{Kehrwert}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{21}{4} > h_c < \frac{21}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 5.25 > h_c > 2.1$$

Die Länge der dritten Höhe im Dreieck liegt also zwischen 2.1 und 5.25.

Aufgabe MS8:

Gegeben ist eine natürliche Zahl n mit mindestens 3 Stellen (im Dezimalsystem). Sei m die Zahl, die entsteht, wenn man aus n die letzten beiden Ziffern wegstreicht.

(a) Bestimme die größtmögliche Zahl n, für die $\frac{n}{m} = 107$ gilt.

(b) Was ist der kleinstmögliche Wert für $\frac{n}{m}$? Gib eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, für die $\frac{n}{m}$ minimal wird.

(c) Was ist der größtmögliche Wert für $\frac{n}{m}$? Gib eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, für die $\frac{n}{m}$ maximal wird.

Lösung:

Die Zahl n kann in der Form $n = 100 \cdot a + b$ mit $a \in \mathbb{N}^*$ und $b \in \{0, \ldots, 99\}$ geschrieben werden. Damit ergibt sich die Zahl m, die entsteht, wenn man aus n die letzten beiden Ziffern wegstreicht, als $m = a$. Also ist:

$$\frac{n}{m} = \frac{100 \cdot a + b}{a} = 100 + \frac{b}{a}$$

(a) Es gilt:

$$\frac{n}{m} = 107 \quad \Leftrightarrow \quad 100 + \frac{b}{a} = 107 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad b = 7 \cdot a$$

Die größtmögliche Zahl n mit $\frac{n}{m} = 107$ erhält man somit, indem man für b das größte Vielfache von 7 mit $b \leq 99$ wählt. Also hat man $b = 98$ und folglich $a = \frac{98}{7} = 14$.

Die größtmögliche Zahl n mit $\frac{n}{m} = 107$ ist somit: $n = 1498$

(b) Es ist stets (wegen $a > 0$ und $b \geq 0$):

$$\frac{n}{m} = 100 + \frac{b}{a} \geq 100 + \frac{0}{a} = 100$$

Der kleinstmögliche Wert von $\frac{n}{m}$ ist somit 100. Die Zahlen n mit $\frac{n}{m} = 100$ sind (genau) die Vielfachen von 100 (dann ist $b = 0$), also $n \in \{100, 200, 300, \ldots\}$.

(c) Es ist stets (wegen $a \geq 1$ und $b \leq 99$):

$$\frac{n}{m} = 100 + \frac{b}{a} \leq 100 + \frac{99}{1} = 199$$

Der kleinstmögliche Wert von $\frac{n}{m}$ ist somit 199. Die (einzige) Zahl n mit $\frac{n}{m} = 199$ ist $n = 199$ (dann ist $a = 1$ und $b = 99$).